第 14 講　グラフの描き方（その２）

14

［A］ $0 \leqq x \leqq \pi$ に対して，$f(x)=\dfrac{\sin^2 x\cos x}{1+\sin x}$ とおくとき，$y=f(x)$ のグラフの概形を描け.

［B］ 次式で表される関数のグラフについて，次の問いに答えよ.

$$y=\frac{e^{-\frac{a}{x}}}{x-1} \qquad \text{ただし，}a\text{ は正の定数とする.}$$

(1) $a<4$ では，y は極値をもたないことを示せ.

(2) $a>4$ では，y は $1<x<\dfrac{a}{2}$ において極小値をとり，$\dfrac{a}{2}<x$ において極大値をとることを示せ.

(3) x が正の値から 0 に近づくとき，y の値はどのように変化するか説明せよ．また，x が負の値から 0 に近づくときについても説明せよ.

(4) 以上の結果より，$a<4$，$a=4$，$a>4$ の各場合に対して，グラフの概形を描け.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第14講　グラフの描き方（その2）

14　$f(x)=2\sin x+\sin x\cos x$　$\left(0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とするとき，$y=f(x)$ のグラフを描け.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 14 講　グラフの描き方（その２）

14

［A］ $0 \leqq x \leqq \pi$ に対して，$f(x)=\dfrac{\sin^2 x\cos x}{1+\sin x}$ とおくとき，$y=f(x)$ のグラフの概形を描け.

［B］ 次式で表される関数のグラフについて，次の問いに答えよ.

$$y=\frac{e^{-\frac{a}{x}}}{x-1} \qquad \text{ただし，} a \text{ は正の定数とする.}$$

(1) $a<4$ では，y は極値をもたないことを示せ.

(2) $a>4$ では，y は $1<x<\dfrac{a}{2}$ において極小値をとり，$\dfrac{a}{2}<x$ において極大値をとることを示せ.

(3) x が正の値から 0 に近づくとき，y の値はどのように変化するか説明せよ．また，x が負の値から 0 に近づくときについても説明せよ.

(4) 以上の結果より，$a<4$，$a=4$，$a>4$ の各場合に対して，グラフの概形を描け.

【答】 ［A］ 略

［B］ (1) 略　(2) 略　(3) $\begin{cases} x \to +0 \text{ のとき} & y<0 \text{ の側から } 0 \text{ に近づく.} \\ x \to -0 \text{ のとき} & -\infty \text{ に発散する.} \end{cases}$　(4) 略

【解説】

［A］ $f(x)=\dfrac{\sin^2 x\cos x}{1+\sin x}$ を x で微分すると，

$$f'(x)=\frac{1}{(1+\sin x)^2}\{(2\sin x\cos^2 x-\sin^3 x)(1+\sin x)-\sin^2 x\cos x\cdot\cos x\}$$

$$=\frac{\sin x}{1+\sin x}\{(2\cos^2 x-\sin^2 x)-\sin x(1-\sin x)\}$$

$$=\frac{\sin x(-2\sin^2 x-\sin x+2)}{1+\sin x}$$

$0<x<\pi$ における $f'(x)$ の符号は $-2\sin^2 x-\sin x+2$ の符号と一致するので

$-2\sin^2 x-\sin x+2=0$，つまり $\sin x=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$ かつ $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす x を α とおくと，$f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\pi-\alpha$	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	＋	0	－	0	＋	0
$f(x)$	0	↗		↘		↗	0

となる．ここで $\sin\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$ かつ $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より

$$-2\sin^2\alpha-\sin\alpha+2=0 \iff 1-\sin^2\alpha=\frac{1}{2}\sin\alpha$$

$$\therefore\ \cos\alpha=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{8}}$$

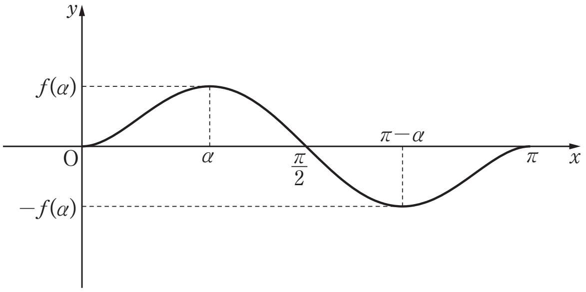
©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

となるので $f(x)$ の最大値は

$$f(\alpha)=\frac{\sin^2\alpha\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$$
$$=\cdots=\frac{(9-\sqrt{17})\sqrt{\sqrt{17}-4}}{8}$$

よってグラフの概形は



［B］ $y=\dfrac{e^{-\frac{a}{x}}}{x-1}$ より

$$y'=\frac{1}{(x-1)^2}\left\{e^{-\frac{a}{x}}\left(\frac{a}{x^2}\right)(x-1)-e^{-\frac{a}{x}}\cdot 1\right\}$$
$$=\frac{e^{-\frac{a}{x}}}{x^2(x-1)^2}(-x^2+ax-a)$$
$$=\frac{e^{-\frac{a}{x}}}{x^2(x-1)^2}\left\{-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a}{4}(a-4)\right\}$$

(1)　$a<4$ のとき

$$\frac{a}{4}(a-4)<0$$

　よって $y'<0$ となるので極値は存在しない.

(2)　$f(x)=-x^2+ax-a$ とおくと

$$f(1)=-1<0$$
$$f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a}{4}(a-4)>0\quad(a>4\text{ より})$$
$$f(a)=-a<0$$

　より $f(x)=0$ は $1<x<\dfrac{a}{2}$ と $x>\dfrac{a}{2}$ にそれぞれ１つずつ解をもつので，それぞれ α, β とおくと，$x>1$ での y の増減は

x	1	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y		↘	極小	↗	極大	↘

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(-\frac{a}{x}\right)=-\infty$ より　$\displaystyle\lim_{x\to+0}e^{-\frac{a}{x}}=0$

$$\therefore\quad \lim_{x\to+0}\frac{e^{-\frac{a}{x}}}{x-1}=0$$

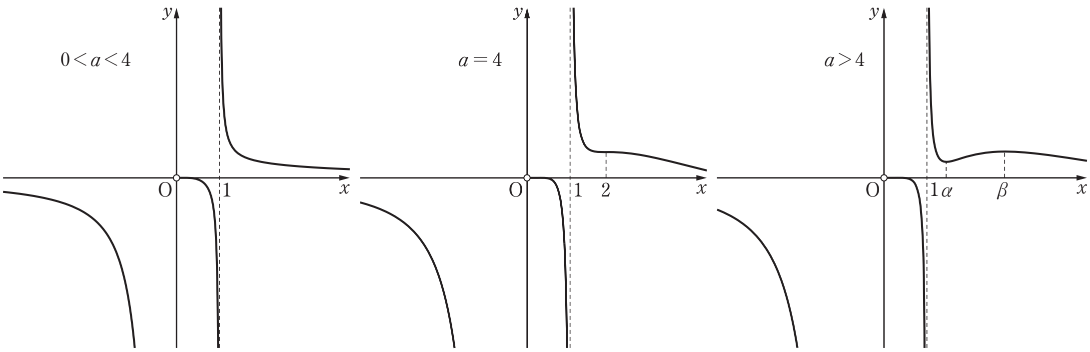
同様に $\displaystyle\lim_{x\to-0}\left(-\frac{a}{x}\right)=\infty$ より

$$\lim_{x\to-0}\frac{e^{-\frac{a}{x}}}{x-1}=-\infty$$

(4)　$a=4$ のとき $x>1$ での y の増減は

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'		$-$	0	$-$
y		↘		↘

となるのでグラフの概形は下図.



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 14 講　グラフの描き方（その２）

14　$f(x)=2\sin x+\sin x\cos x$　$\left(0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とするとき，$y=f(x)$ のグラフを描け.

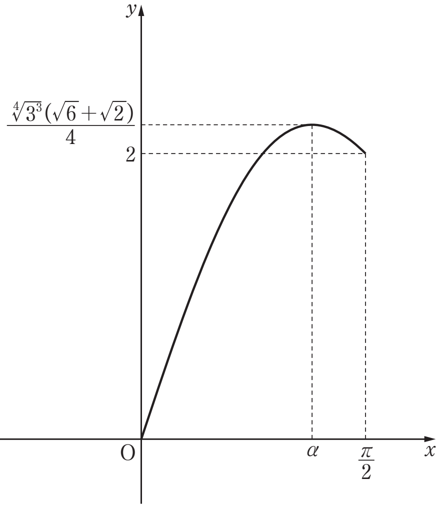
【答】　略

【解説】

$f'(x)=2\cos^2 x+2\cos x-1$ より，α を $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ かつ $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数としたとき $f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{\sqrt[4]{3^3}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$	↘	2

となるので，$y=f(x)$ のグラフは



ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。